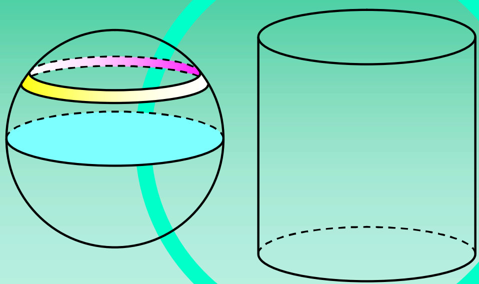
球體面積和體積

參考並修編自香港梁子傑老師檔案

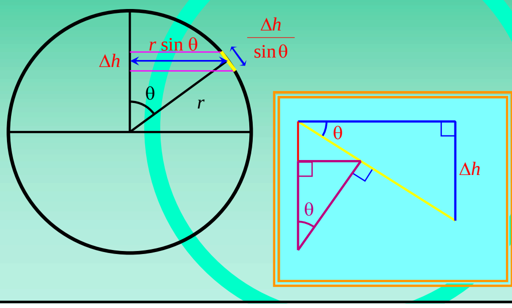
球體面積

- 阿基米德（Archimedes, 287 B.C. – 212 B.C.）
- 在《論球和圓柱》中，阿基米德運用窮竭法證明了與球體的面積和體積有關的公式。
- 他說：「球體面積等於其大圓面積的 4 倍。」

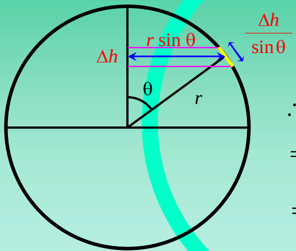
球體面積與圓柱體之關係



直切面圖



直切面圖

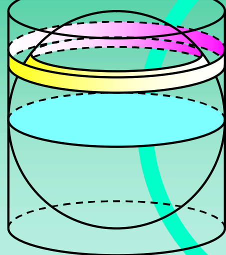


∴ 窄圈面積

$$= 2\pi\,(r\sin\theta) \times \frac{\Delta h}{\sin\theta}$$

$$= 2\pi\, r\, \Delta h$$

球體面積



窄圈面積 $= 2\pi\, r\, \Delta h$

= 圓柱上窄圈面積

∴ 球面面積

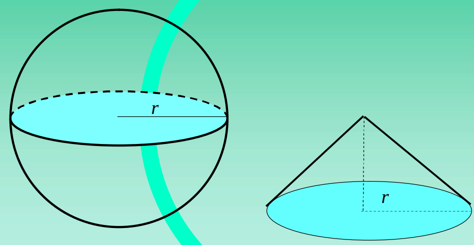
= 圓柱側面面積

$= 4\,\pi\, r^2$

= 大圓面積的 4 倍

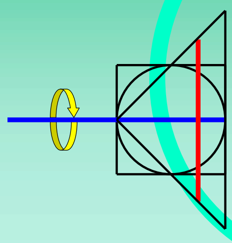
- 以雙重歸謬法證明
- 爲說服亞歷山卓數學家Dositheus而寫
- 當一些有趣的命題在我腦中盤旋時，我就試圖給它們證明了
- 爲何是4？

球體積等於以其大圓為底
半徑為高的圓錐體積的4倍



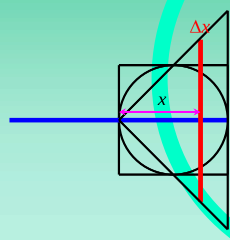
球體體積

- 在《處理力學問題的方法》中，阿基米德運用了「槓杆原理」來證明球體體積公式。



球體體積

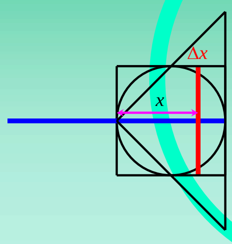
- 在《處理力學問題的方法》中，阿基米德運用了「槓杆原理」來證明球體體積公式。



圓錐薄片體積 = $\pi x^2 \Delta x$

球體體積

- 在《處理力學問題的方法》中，阿基米德運用了「槓杆原理」來證明球體體積公式。

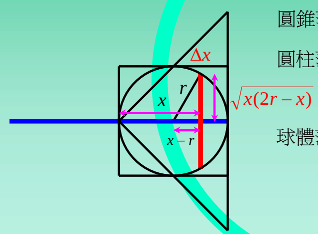


圓錐薄片體積 = $\pi x^2 \Delta x$

圓柱薄片體積 = $\pi r^2 \Delta x$

球體體積

- 在《處理力學問題的方法》中，阿基米德運用了「槓杆原理」來證明球體體積公式。



圓錐薄片體積 = $\pi x^2 \Delta x$

圓柱薄片體積 = $\pi r^2 \Delta x$

球體薄片體積 = $\pi x(2r - x) \Delta x$

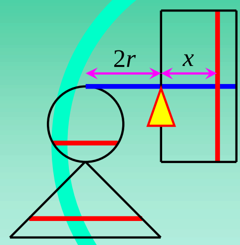
球體體積

留意：

$$(\text{球體薄片體積} + \text{圓錐薄片體積}) \times 2r$$
$$= (\pi x(2r - x)\,\Delta x + \pi x^2\,\Delta x) \times 2r$$
$$= 4\pi r^2 x\,\Delta x$$
$$= 4 \times \pi r^2 \Delta x \times x$$
$$= 4 \times \text{圓柱薄片體積} \times x$$

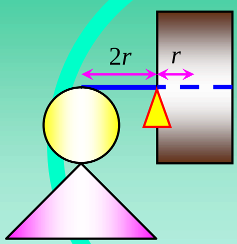
球體體積

即：



球體體積

即：



$(\text{球體體積} + \text{圓錐體積}) \times 2r = 4 \text{ 倍圓柱體積} \times r$

球體體積

$(\text{球體體積} + \text{錐體體積}) \times 2r = 4 \text{ 倍圓柱體積} \times r$

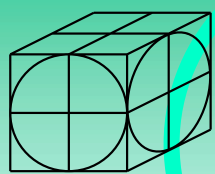
$$\left(V + \frac{1}{3}\pi(2r)^2(2r)\right) \times 2r = (4 \times \pi r^2(2r)) \times r$$

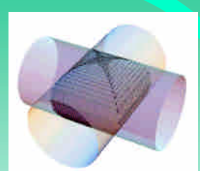
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

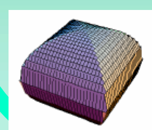
《九章算術》

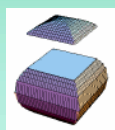
- 在《九章算術》第四卷「少廣」中，記述了一個由球體體積計算直徑長度的方法：「開立圓術曰：置積尺數，以十六乘之，九而一，所得開立方除之，即丸徑。」
- 這方法等同於 $d = \sqrt[3]{\frac{16V}{9}}$ 或 $V = \frac{9}{16}d^3$ 。
- 劉徽批評了此算式，並以「牟合方蓋」的體積來解釋他的觀點。

牟合方蓋

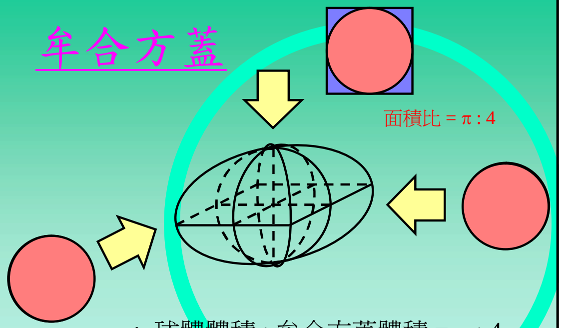








牟合方蓋



∴ 球體體積 : 牟合方蓋體積 = π : 4

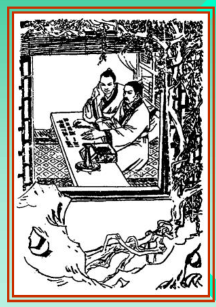
牟合方蓋

- 可惜劉徽並未能推算出牟合方蓋體積或直接推算出球體體積的公式！
- 劉徽表示：「欲陋形措意，懼失正理。敢不闕疑，以俟能言者。」

祖暅原理

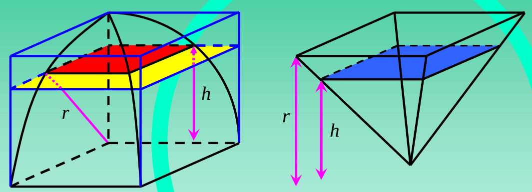
- 祖暅，祖沖之之子，生卒年代不詳。

祖暅原理



- 祖暅，祖沖之之子，生卒年代不詳。
- 他提出了一個數學原理：「緣冪勢既同，則積不容異。」，從而計算出牟合方蓋的體積。

祖暅原理

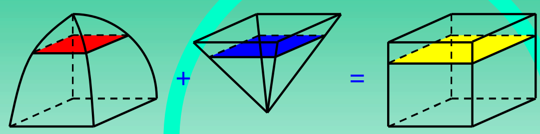


紅色面積 = $r^2 - h^2$

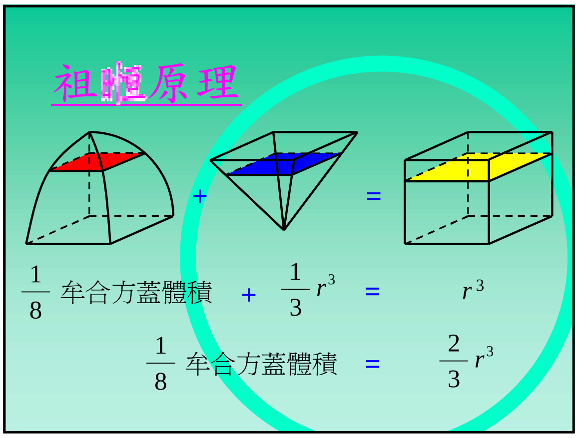
藍色面積 = h^2 = 黃色面積！

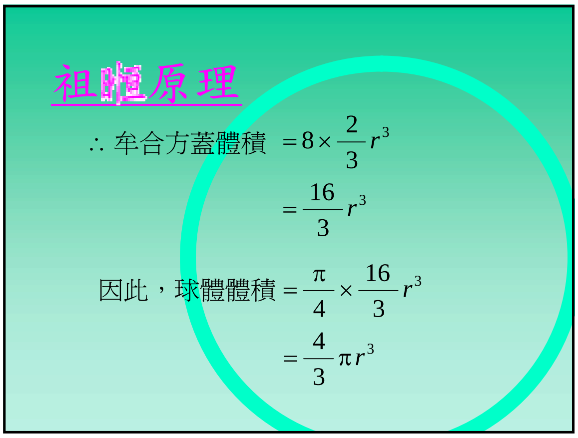
黃色面積 = $r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$

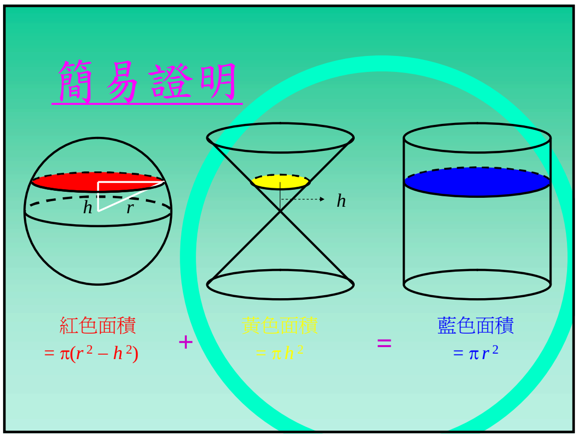
祖暅原理

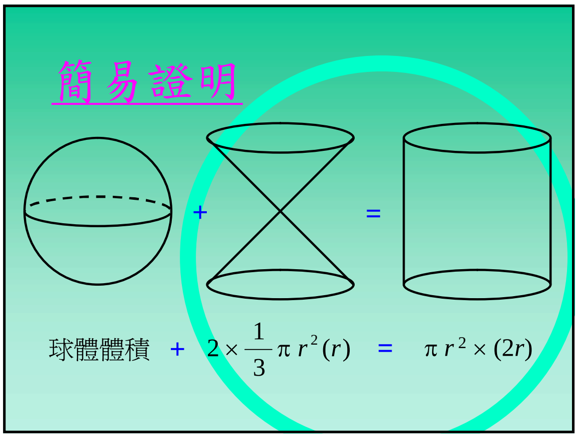


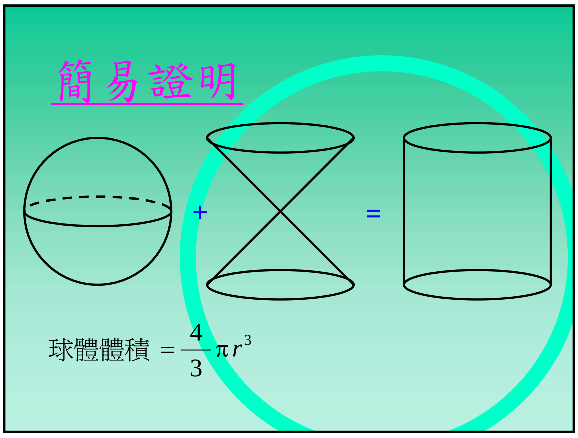
紅色面積 + 藍色面積 = 黃色面積

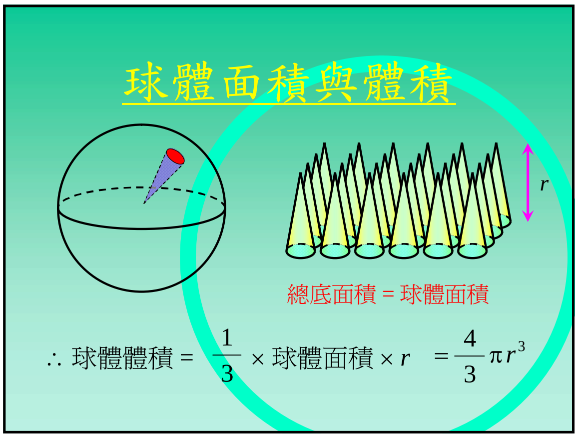

祖暅原理
+
=
$\frac{1}{8}$ 牟合方蓋體積 + $\frac{1}{3}r^3$ = r^3
$\frac{1}{8}$ 牟合方蓋體積 = $\frac{2}{3}r^3$


祖暅原理
∴ 牟合方蓋體積 $= 8 \times \frac{2}{3}r^3$
$= \frac{16}{3}r^3$
因此，球體體積 $= \frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}r^3$
$= \frac{4}{3}\pi r^3$


簡易證明
h
r
h
紅色面積
$= \pi(r^2 - h^2)$
+
黃色面積
$= \pi h^2$
=
藍色面積
$= \pi r^2$


簡易證明
+
=
球體體積 + $2 \times \frac{1}{3}\pi r^2(r)$ = $\pi r^2 \times (2r)$


簡易證明
+
=
球體體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$


球體面積與體積
r
總底面積 = 球體面積
∴ 球體體積 $= \frac{1}{3} \times$ 球體面積 $\times r$ $= \frac{4}{3}\pi r^3$