

金門地區第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：柱體與錐體

關 鍵 詞：柱體體積、錐體體積

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫類別、科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由國立臺灣科學教育館統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

柱體與錐體

壹、摘要

柱體、錐體與台體關係密切，柱體及錐體可以看作爲“特殊”的台體。生活中常見的錐體其實較少，大部分還是以柱體和台體較多。又依割補法與數學實驗，我們可以證明錐體的體積等於底面積與高乘積的三分之一。

貳、研究動機

五年級時我們學過柱體與錐體的區別，這學期上數學課時也學會了柱體的體積計算公式，然而這一切並不足以滿足我的好奇心。

首先，課本中談了很多柱體，可是生活中常見的一些物體，如：飲料杯、杯麵、布丁等，它們算是柱體嗎？經由請教老師，我才知道它們應該算是「台體」才對。其次，錐體的體積與台體的體積應該怎麼計算呢？柱體、錐體與台體之間是否又存在著甚麼關係呢？


老師說要導出台體的體積公式有點困難與複雜，不過仍鼓勵我們針對其他的部分著手探究看看，於是我找了幾個同學，在老師的指導下開始了本次的研究。

參、研究目的

- 1.了解柱體、錐體與台物體如何區別？生活中常見的代表物體有哪些？
- 2.藉由柱體與錐體體積的關係，導出錐體的體積公式。

肆、研究設備與器材

名稱	數量
紙黏土	一包
竹籤	一包
等高之角錐與角柱容器	數個
泡棉積木	數個
筆	數枝
計算紙	數張
計算機	一台
量杯	數個
數位相機	一台
電腦	一台



伍、研究過程或方法

問題一：柱體、錐體、與台體。

(一)活動一、找出柱體、錐體、與台體的定義，並比較它們之間的異同。

藉由課本與網路資料找出柱體與錐體的定義。

(二)活動二、它們是柱體、錐體或台體嗎？

觀察自己的生活週遭，試著將柱體、錐體、與台體的代表物體找出來吧！

問題二：藉由柱體與錐體體積的關係，導出錐體的體積公式。

(一)活動三、利用割補法找出三角錐的體積

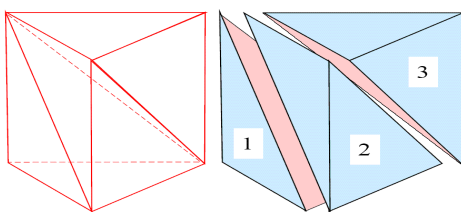
1.三角柱(體積 V)可依下圖的方式，切割成三個三角錐1、2、3。

2.三角錐1、三角錐2有相同的底，高也相等，因此由活動一可以了解三角錐1的體積 V_1 會和三角錐2的體積 V_2 相等。即 $V_1 = V_2$

3.三角錐2、三角錐3也有相同的底，高也相等，因此三角錐2的體積 V_2 會和三角錐3的體積 V_3 相等。即 $V_2 = V_3$

4.所以 $V_1 = V_2 = V_3 = (1/3)V$ ，又六下學過三角柱的體積為底面積 $s \times$ 高 h ，即 $V = s \times h$

5.所以可以推知三角錐的體積為三角柱體積的三分之一。

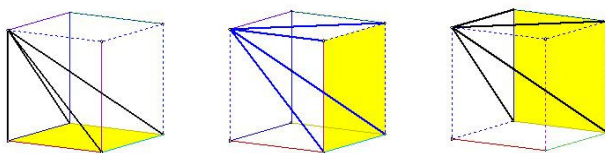


(三)活動四、利用割補法找出四角錐的體積

1.把一個正方體(可以當成四角柱)切割成三個形狀、大小均相同的四角錐。

2.正方體的體積等於同底等高的三個四角錐體積和。

3.所以可以推知四角錐的體積為四角柱體積的三分之一。



(四)活動五、利用實驗操作去發現錐體體積與柱體體積間的關係。

1.找出等高等底面的三角錐甲、三角柱乙兩個容器，先將甲容器注滿水，接著倒入量杯內測量其容積後，再將水倒入乙容器。

2.觀察乙容器的水深。

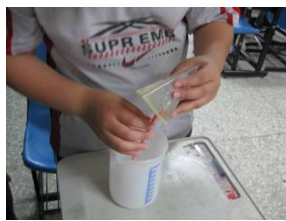
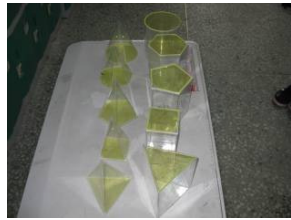
3.重複1至2步驟，看看需要倒多少次才能裝滿乙容器？

4.將裝滿水的乙容器倒入量杯中，測量其容積並做紀錄。

5.同步驟1至4的方法，改成底面積與高相同的四角柱與四角錐容器；五角柱

與五角錐；六角柱與六角錐；圓柱與圓錐形來操作觀察。

6.數學實驗的操作觀察結果，是否會和切補法得到的結果一樣？



陸、研究結果

一、柱體、錐體與台體的定義

(一)柱體

- 1.依照柱體底面的形狀來稱呼柱體。像底面是三角形、四邊形、就分別稱它們為三角柱、四角柱，當底面是圓形則稱為圓柱。

2.兩個上下平行且全等的面稱為柱體的底面；其他的面稱為柱體的側面。

(二)錐體

1.我們依照底面的形狀來稱呼錐體。當錐體的底面是三角形、四邊形、五邊形及六邊形時，則分別稱它們為三角錐、四角錐、五角錐和六角錐。

2.當底面是圓形則稱為圓錐。

(三)台體


1.我們依照底面的形狀來稱呼台體。

2.當台體的底面是三角形、四邊形、五邊形及六邊形時，則分別稱它們為三角錐台、四角錐台、五角錐台和六角錐台。

3.當底面是圓形則稱為圓錐台或圓台。

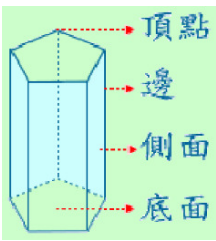
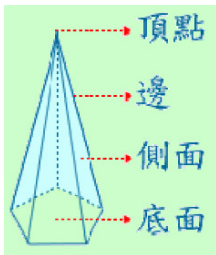
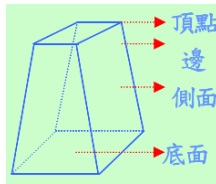
4.兩個上下平行且相似的面稱為台體的底面；其他的面稱為台體的側面。

二、生活中可見的柱體、錐體與台體

柱體	錐體	台體
變電箱 	聖誕帽 	紙杯 
信箱 	三角錐警示柱 	杯麵 
奶粉罐 	金字塔 	飲料杯 
音響	錐螺	布丁

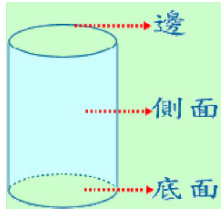
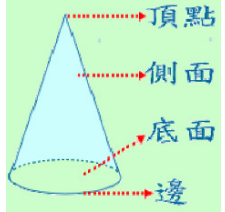
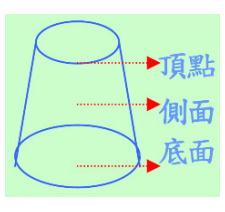
		
鋁箔包	粽子	即溶咖啡
		
面紙盒	飾品	垃圾桶
		

三、角柱、角錐與稜台體的比較

形狀		【角柱】	【角錐】	【角錐台】
				
頂點	個數	底面邊數×2	底面邊數+1	底面邊數×2
邊	個數	底面邊數×3	底面邊數×2	底面邊數×3
面	底面 形狀	多邊形	正多邊形	多邊形

	特點	1、兩個底面互相平行且全等 2、底面和側面互相垂直	沒有垂直或平行的面	兩個底面互相平行且相似	
		個數	2個	1個	2個
	側面	形狀	四邊形	三角形	四邊形
		特點	底面和側面互相垂直	側面上的邊有共同的頂點	
	個數	底面邊數	底面邊數	底面邊數	
面的總數		底面邊數 + 2	底面邊數 + 1	底面邊數 + 2	

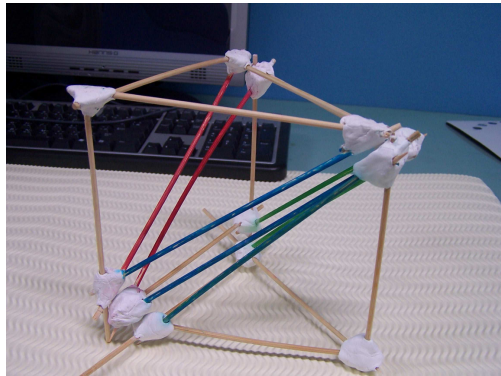
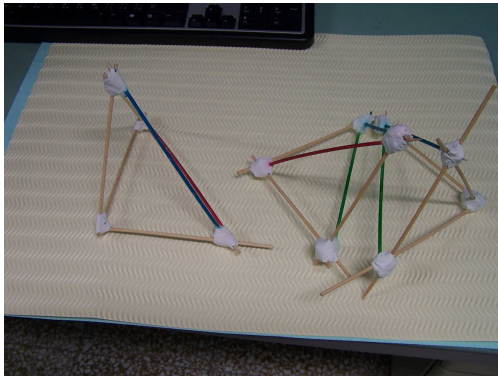
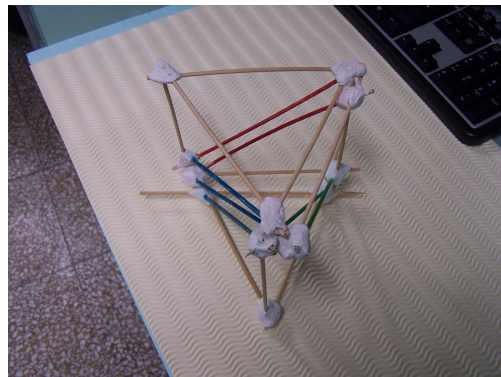
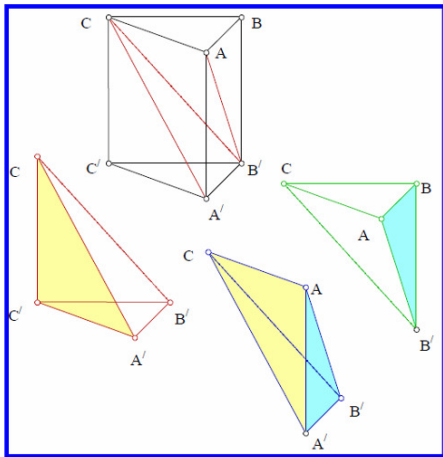
四、圓柱、圓錐與圓台體的頂點、邊與面的比較

形狀		【圓柱體】	【圓錐體】	【圓台體】	
					
頂點	個數	0個	1個	0個	
邊	個數	2條	1條	2條	
面	底面	形狀	圓形	圓形	圓形
		特點	1、兩個底面互相平行且全等 2、底面和側面互相垂直	沒有垂直或平行的面	兩個底面互相平行且相似
	個數	2個	1個	2個	
	側面	形狀	展開後為長方形	展開後為扇形	
		特點	曲面	曲面	曲面
	個數	1個	1個	1個	
面的總數		3個	2個	3個	

五、利用割補法找出三角錐的體積

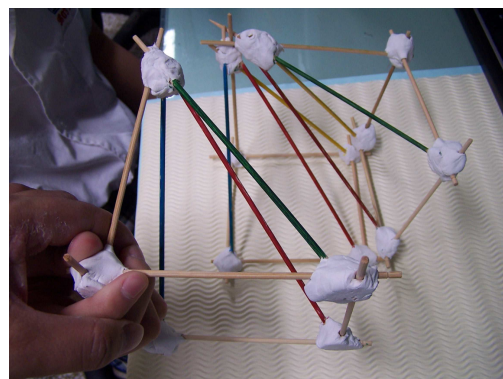
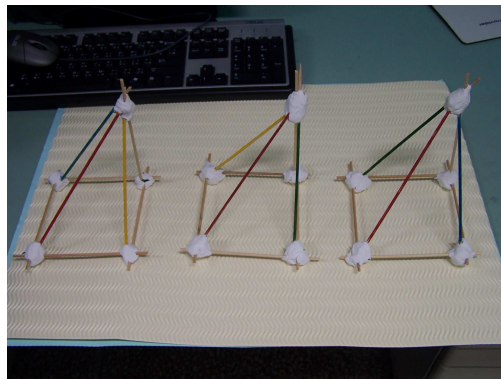
我們可把一個三角柱分割成三個三角錐1、2、3（如圖）。三角錐1、2的底面 $\triangle CC'A'$ 、 $\triangle A'AC$ 面積相等，高也相等（頂點都是 B' ），所以由活動一可以知道三角錐1的體積 V_1 與三角錐2的體積 V_2 相等。三角錐2、3的底 $\triangle AA'B'$ 、 $\triangle B'BA$ 的面積相等，高也相等（頂點都是 C ），所以可以知道三角錐2的體積 V_2 、三角錐3的體積 V_3 體積相等。

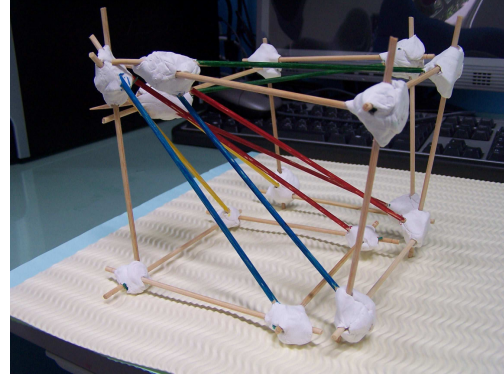
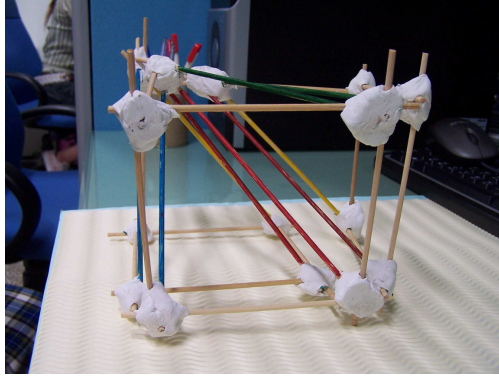
所以 $V_1 = V_2 = V_3 = (1/3)V$ ，又六下學過三角柱的體積為：底面積 \times 高 h ，即 $V = sh$



六、利用割補法找出四角錐的體積

正方體(可以當成四角柱)切割成三個形狀、大小均相同的四角錐。相反的我們將三個形狀、大小均相同的四角錐組合成一個正方體。亦即正方體的體積等於同底等高的三個四角錐體積和，也就是說四角錐的體積為四角柱體積的三分之一。





七、數學實驗結果

【利用錐體注水操作紀錄表】

底面形狀 容器容積	三角	四角	五角	六角	圓形
錐體	120ml	110ml	205ml	210ml	280ml
柱體	380ml	345ml	635ml	650ml	830ml
理論柱體體積	360ml	330ml	615ml	630ml	840ml
同高同底面的錐體 占柱體體積的比率 (理論值33.33%)	31.57%	31.88%	32.28%	32.31%	33.73%
誤差(量測體積-理論 體積)/理論體積	5.56%	4.55%	3.25%	3.17%	-1.20%

根據實驗，我們發現錐體倒一次水到同高同底面柱體容器內約佔其三分之一的高度，亦即約倒三次即可倒滿。

雖然實驗數字和理論值有些誤差，但誤差不大，因此不論利用割補法或是數學實驗的結果，我們都可以證明錐體三角錐的體積=底面積與高乘積的三分之一。

柒、討論

一、側面和底面不垂直，還是柱體嗎？

依據定義，柱體的兩底面互相平行，且大小相等，因此柱體的側面和底面不一定垂直。

1. 直角柱

有上下為全等的多邊形的底，且互相平行，其側面均為長方形。

2. 正角柱

與直角柱的唯一差別在其底面均是正多邊形。

3. 斜角柱

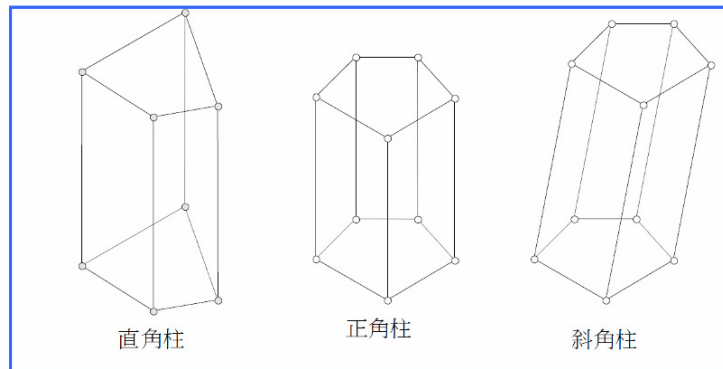
有上下為全等的多邊形的底，且互相平行，各側面均為平行四邊形。

4. 正圓柱

上下為全等的圓形，側面與底面為垂直關係。

5.斜圓柱

上下底亦為全等的圓形，上下底互相平行。



二、錐體除了角錐與圓錐，有更詳細的分法嗎?

像我們用割補法所分割出來的角椎，和課本所見到角錐有些許的不同。我們在課本上所看到的，不論是角錐或圓錐，皆為底面為正多邊形，頂點在過正多邊形中心的垂線上的正角錐或正圓錐，然而我們用割補法所分割出來的三角錐和四角錐，則為斜角錐。

1.正角錐

底面為正多邊形，頂點在過正多邊形中心的垂線上。自頂點至底面個頂點連線都等長，其各側面都是全等的三角形。正角錐可依底面為正 n 邊形，稱為正 n 角錐。

2.斜角錐

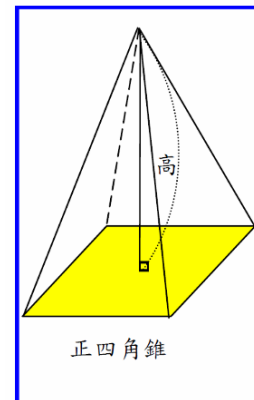
底面則為多邊形，頂點沒有條件限制。

3.正圓錐

底面都是圓形，頂點必需在底面圓心的垂線上。

4.斜圓錐

底面都是圓形，頂點沒有條件限制。正四角錐



三、利用割補法的活動所遇到的困難

雖然我們一開始原本想切割泡棉，來了解割補的具體的形體，但後來發覺泡棉其實很硬不好切割，其次照老師所說明的圖來切割也不太容易，切割出來的三角柱和四角柱有點慘不忍睹。後來我們只好改用竹籤來做出三角柱和四角柱的骨架來了解。

四、實驗的誤差來源

根據理論，錐體體積為同底等高柱體三之一。然實驗結果與理論多少有些差異，這些誤差的來源為何呢？

儀器誤差：因為錐體與柱體容器本身不夠精密，此外也忽略了容器本身厚度(約3mm)的影響。我們可以從實驗數據發現，當錐體與柱體容器越小，誤差也越大。操作誤差：在容器間倒水的過程中，多少有些水會溢濺出來，也會影響的量測的結果。所幸誤差皆能控制在5%左右，以實驗的結果來說是在可以接受的範圍內。

捌、結論

- 一、柱體及錐體可以看作爲「特殊」的台體，當兩底面一樣時則是柱體；一底面較小爲台體；當一底面縮小至一點時，則是錐體了。
- 二、生活中常見的以柱體(尤其是四角柱)和台體(特別是圓台)居多，錐體比較不常見。
- 三、錐體體積爲同底等高柱體體積的三分之一。

玖、參考資料

- 一、康軒文教事業。國小數學第十冊(五下)，第八單元：柱體與錐體。
- 二、康軒文教事業。國小數學第十二冊(六下)，第四單元：柱體的體積。
- 三、張仁邦(民85)。數學實驗教學法:面積與體積的計算。國教月刊。42-9.10:28-33。
- 四、林能得等(民82)。國小學童對體積測量的認識。師大學報。38:269-281。
- 五、中文維基百科

http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%A6%96%E9%A1%B5&variant=zh-tw__